信心，坚持 2 小时在线

2024 管理类联考-数学精讲课

第十一讲 等比数列、平面几何

第三节 等比数列

知识精讲

一、等比数列的定义

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列.这个常数叫做等比数列的公比，记做q. 即: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为非零常数）.

例：数列 2, 4, 8, 16, 32⋯⋯，这个数列每一项与前一项的比都是 2，即这个数列是公比$q=2$的等比数列.

二、等比数列的通项公式

（1）通项公式

在数列 2, 4, 8, 16, 32……中，$a_1=2$，$q=3$，观察可得：

$$a_1=a_1q^0$$
$$a_2=a_1q$$
$$a_3=a_1q^2$$
$$a_4=a_1q^3$$

我们发现，等比数列的每一项都可以用首项a_1和公比q表示出来.

由此，我们可以得**等比数列的通项公式：** $a_n=a_1q^{n-1}$(q为常数,$n\in N^*$);

(2)等比数列通项公式的相关结论一.

例 1：a_1=5， $q=2$的等比数列，通项公式为：$a_n=5\times 2^{n-1}$

例 2：a_1=-3，$q=-2$的等比数列，通项公式为：$a_n=-3\times(-2)^{n-1}$

例 3：a_1=3， $q=3$的等比数列，通项公式为：$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$

由此可见，**等比数列的通项公式有两种形式：**

①$a\times b^{n-1}$，**此时**a**为首项，**b**为公比.**

②b^n**此时首项和公比都是**b.

（3）等比数列通项公式的相关结论二.

观察以下式子：

$$a_5 = a_3 q^2$$

$$a_9 = a_2 q^7$$

由此可得**等比数列的一项重要结论：**

$$a_n = a_m q^{n-m}，\text{或者}\ \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}.$$

三、等比数列的下标和定理.

（1）下标和定理.

若$\{a_n\}$是等比数列，观察以下式子：

$$a_1a_6=a_1\cdot a_1q^5=a_1^{\ 2}q^5$$
$$a_2a_5=a_1q\cdot a_1q^4=a_1^{\ 2}q^5$$
$$a_3a_4=a_1q^2\cdot a_1q^3=a_1^{\ 2}q^5$$

由此可得等比数列最重要的结论——**下标和定理：**

$\{a_n\}$为等比数列，若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q(m,n,p,q\in N^*)$.

特殊地，当$p=q$时，$a_m\cdot a_n=a_p^{\ 2}$.

即：当等比数列的两项下标之和相等时，这两项之积也相等.

例：$a_1a_5=a_2a_4=a_3a_3=a_3^{\ 2}$

(2)等比中项. 若a、b、c是等比数列，则由下标和定理可得：$b^2=ac$，其中，称b为a、c的等比中项.

(3)易错点.

等比数列中各项符号问题：在等比数列中，所有奇数项都是同号的，所有偶数项也是同号的，但是相邻两项可能同号也可能异号.

例：数列$a_n=(-2)^n$，的前 6 项为：-2, 4, -8, 16, -32, 64

例 1：a_1=2，a_5=8，则a_3等于几？由下标和定理可知a_3=4，注意a_3的符号与a_1相同.

例 2：a_1=2，a_3=8，则a_2等于几？由下标和定理可知a_2=4 或者-4，注意a_2的符号不一定与a_1相同.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

1. 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=25$，且$a_1>0$，则$a_3+a_5=$（　　）.

A. 8　　B. 5　　C. 2　　D. -2　　E. -5

信心，坚持2小时在线

例题精练

2.等比数列$\{a_n\}$中，$a_5+a_1=34, a_5-a_1=30$，那么$a_3=$（　）.

A.±8　　B.8　　C.±5　　D.-5　　E.以上结论都不对

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

3. 已知等比数列 a_n 中，$a_1a_9=4$，则 $a_5=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. −2　　D. ±2　　E. 4

信心，坚持 2 小时在线

四、等比数列的前 n 项和

当公比$q=1$时，等比数列即为常数列，显然其前n项和为：na_1, 例：等比数列 2, 2, 2, 2, ……的前n项和为$2n$

当公比$q\neq 1$时，等比数列的前n项和公式证明过程复杂，这里略去证明，直接给出公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$$

例：等比数列$a_n=2^n$的首项$a_1=2$，公比$q=2$，所以其前n项和为：

$$S_n=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2\times(2^n-1)=2^{n+1}-2$$

信心，坚持2小时在线

例题精练

4.等比数列a_n中，a_1=2，q=3，则S_{10}=（　　）

A. 3^9+1　　B. 3^9-1　　C. 3^{10}　　D. $3^{10}-1$　　E. $3^{10}+1$

信心，坚持 2 小时在线

五、解决等比数列基本问题的思路：

(1)首选特殊值法.

(2)有两项相乘，就用下标和定理.

(3)没有两项相乘就用万能方法——即每一项全都用 a_1 和 q 表示.

第六章　几　何

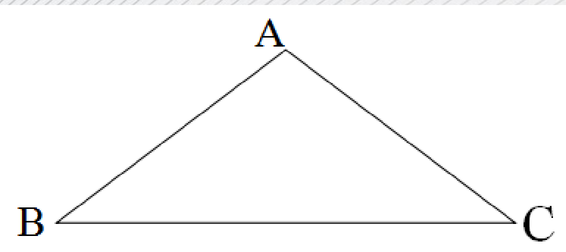
第一节 三角形

知识精讲

一. 三角形

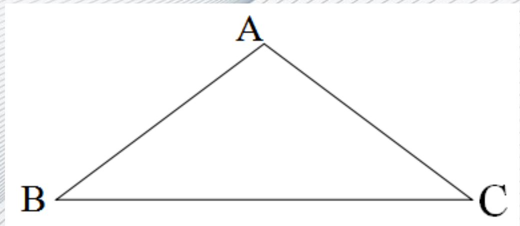
1. 三角形的性质

（1）三角形内角和定理：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

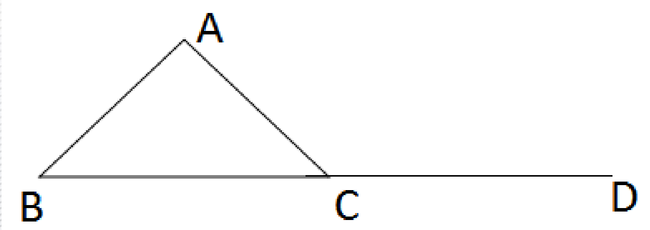


（2）三角形三边关系结论：三角形任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

例：$AB+AC>BC$，$BC-AC<AB$.

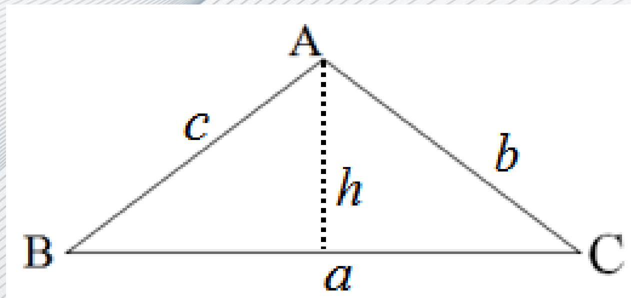


（3）三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和：$\angle ACD=\angle A+\angle B$.



（4）三角形面积公式:

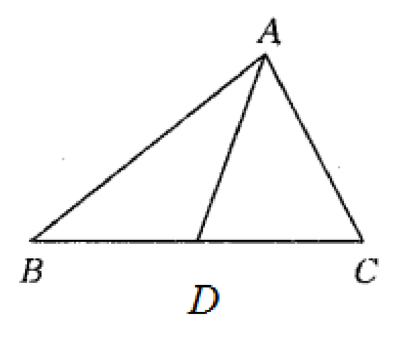
$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$, 其中 h 是边 a 上的高，$\angle C$ 是 a,b 边所夹的角.



注:在直角三角形中，$\sin=\frac{对边}{斜边}$

（5）中线相关结论. 三角形中，连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线.

$BD = CD$，$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$.

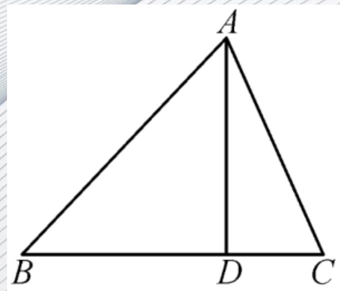


注. 求三角形面积的另外一种方法.

1) D 是 BC 中点，则 $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABC}$，$S_{\Delta ABD} : S_{\Delta ACD} = 1:1$.

2) D 是 BC 三等分点，则 $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}$，$S_{\Delta ABD} : S_{\Delta ACD} = 1:2$.

（6）高线. 从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线做垂线, 顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高线.



信心，坚持2小时在线

例题精练

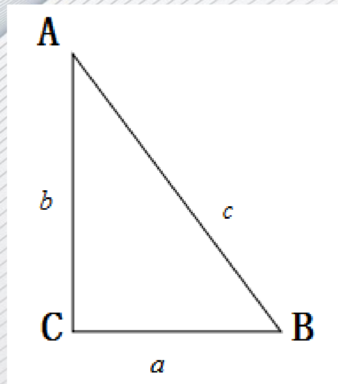
1.下列各组数中能组成三角形的是（ ）

A.1，2，3　　B.2，2，4　　C.1，1，3　　D.4，4，9　　E.3，4，5

2. 特殊三角形

（1）直角三角形

①勾股定理.



$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow$ 三角形是直角三角形（其中 $\angle C=90°$）.

重要结论：直角三角形中，30° 的角所对的直角边是斜边的一半.

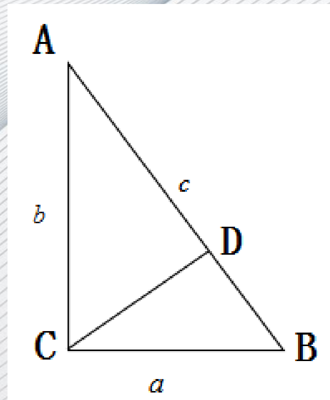
两种特殊的直角三角形三边关系： 一角为 30° 的直角三角形三边比为 $1:\sqrt{3}:2$.

等腰直角三角形三边比为 $1:1:2$.

常用三角函数值：$\sin 30°=\dfrac{1}{2}$, $\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

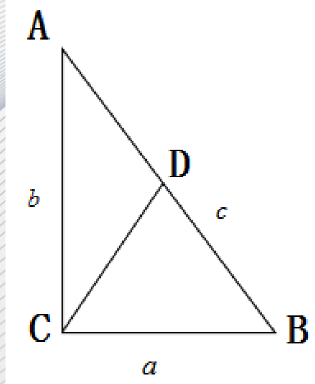
②. 两直角边的乘积等于斜边与其高的乘积:

如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中, $CD\perp AB$，则有 $AC\times BC=AB\times CD$.



③. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

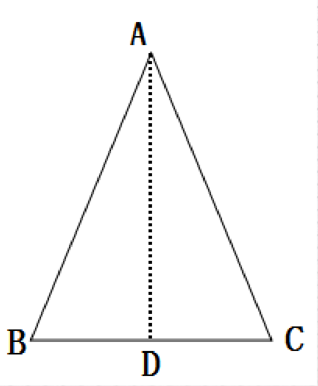
如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中， D 是 AB 中点，则有 $AD=BD=CD$.



（2）等腰三角形.

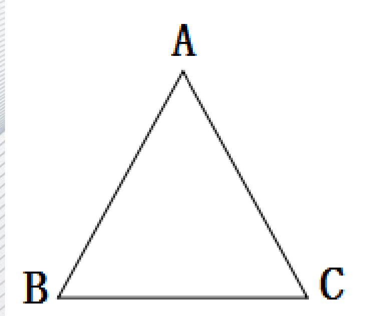
等腰三角形三线合一. 顶角平分线$\Leftrightarrow$底边上的高$\Leftrightarrow$底边上的中线.

$$AD\text{平分}\angle BAC \Leftrightarrow AD\perp BC \Leftrightarrow BD=CD.$$



（3）等边三角形的定义与结论.

①．三条边都相等，各角都相等（60°）



$AB = AC = BC, \angle A = \angle B = \angle C = 60°$

②．有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

③．面积为$S_{\Delta} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$（$a$为边长）.

$AB = AC = BC = a$，做 $AD \perp BC$ 于 D，则 $BD = \dfrac{1}{2}a$. 由勾股定理可得：$AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，那么等边三角形的面积$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \times BC \times AD = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

信心，坚持2小时在线

例题精练

2.等腰三角形的三条边中有两条长度是2和4，则该三角形的周长是（ ）.

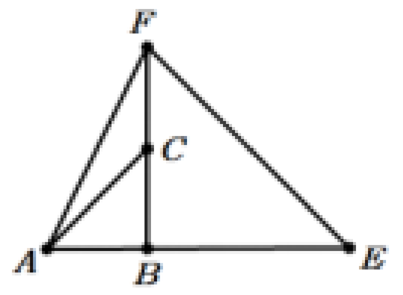
A.8 B.10 C.8或10 D.12 E.16

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

3.如图所示，已知 AE=3AB,BF=2BC,若△ABC 的面积为 2，则△AEF 的面积为（   ）

A.14　　B.12　　C.10　　D.8　　E.6



信心，坚持 2 小时在线

例题精练

4.在直角三角形中，若斜边与一直角边的和是 8，差是 2，则另一条直角边的长度是(　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.10　　E.9

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

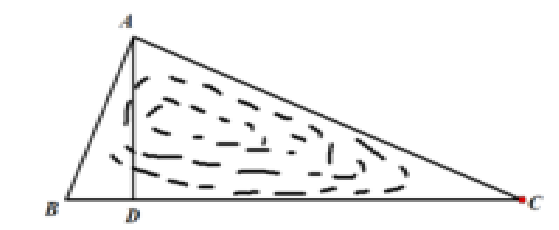
5. 在 Rt△ABC 中，AB=6，BC=8，则斜边 AC 上的高是（　）.

A. 4　　B. 4.8　　C. 5　　D. 10　　E. 9.6

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

6.如图，在直角三角形 ABC 区域内部有座山，现计划从 BC 边上某点 D 开凿一条隧道到点 A，要求隧道长度最短，已知 AB 长为$5km$,AC 长为$12km$，则所开凿的隧道 AD 的长度约为（　）.



A. 4. 12km　　B. 4. 22km　　C. 4. 42km　　D. 4. 62km　　E. 4. 92km

3. 全等三角形

(1) 判定方法. *SSS*. *SAS*. *ASA*. *AAS*. *HL*（5 种）

SSS. 三边对应相等的两个三角形全等，简写为“边边边”或“*SSS*”；

SAS. 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等, 简写为“边角边”或“*SAS*”；

ASA. 两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等，简写成“角边角”或“*ASA*”；

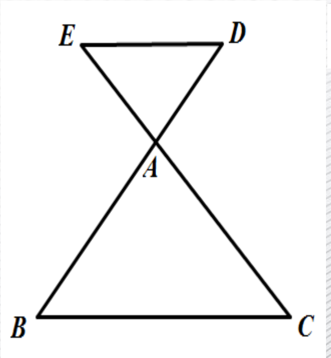
AAS. 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等，简称“角角边”或“*AAS*”；

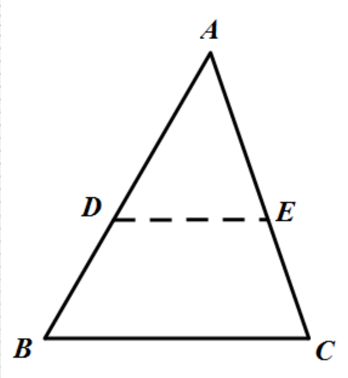
HL. 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等（简记为 *HL*）.

(2) 性质. 对应线段（对应边，对应边上的高、中线、角平分线）均相等，且对应角、面积也相等.

4. 相似三角形

(1) 三个角对应相等. 三条边对应成比例的两个三角形叫做相似三角形.





$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta ADE$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta ADE$$

(2)相似比的定义.相似三角形对应边的比（k）叫做相似比（或相似系数）.

(3)相似性质.

①相似三角形的对应角相等，对应线段成比例.

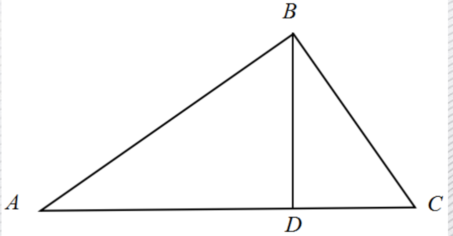
②相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比 .

③相似三角形周长的比等于相似比， 面积的比等于相似比的平方.

(4)相似的应用.

①三角形中位线. 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

②相似经常使用在直角三角形中！如图：$\Delta ABD \backsim \Delta ACB \backsim \Delta CBD$



信心，坚持 2 小时在线

例题精练

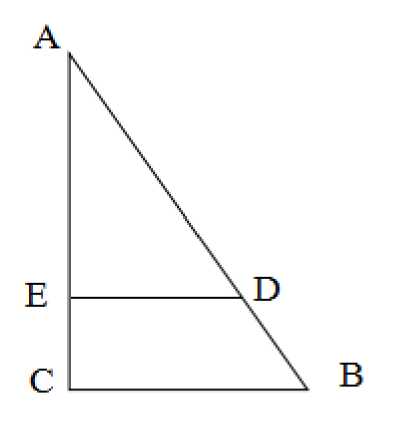
7. $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，AB=5，AC=7，BC=4，已知$\triangle DEF$中最短边是 12，则$\triangle DEF$的周长是（　）.

A. 48　　B. 10　　C. 15　　D. 20　　E. 15

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

8. 如图，在直角三角形ABC中，$AC=4$, $BC=3$, $DE \parallel BC$，已知梯形$BCED$的面积为 3，则DE的长为（ ）



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. $4\sqrt{3}-4$　　D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{2}+1$