信心，坚持 2 小时在线

2024 管理类联考-数学精讲课

第十讲 等差数列

第一节　等差数列

知识精讲

一、等差数列的定义

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，记做d. 即：$a_{n+1}-a_n=d.(d$为常数$,n\in N^*)$;

例：数列 3, 5, 7, 9, 11……，这个数列每一项与前一项的差都是 2，即这个数列是公差$d=2$的等差数列.

信心，坚持 2 小时在线

二、等差数列的通项公式

在数列 3, 5, 7, 9, 11……中，$a_1=3$，$d=2$，观察可得：

$$a_1=a_1+0d$$
$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_1+2d$$
$$a_4=a_1+3d$$

显然，等差数列的通项公式可以用首项a_1和公差d表示出来：

$$a_n=a_1+(n-1)d.(d\text{为常数},n\in N^*);$$

例①：$a_1=5$，$d=2$的等差数列，通项公式为：$a_n=5+2(n-1)=2n+3$

例②：$a_1=-3$，$d=-2$的等差数列，通项公式为：$a_n=-3-2(n-1)=-2n-1$

由此可见，若等差数列的公差为d，则通项公式为：$a_n=dn+C$，其中C为待定常数.

信心，坚持 2 小时在线

观察以下式子：

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_5 - a_2 = 3d$$
$$a_9 - a_7 = 2d$$
$$a_2 - a_6 = -4d$$

由此可得等差数列的一项重要结论：

$$a_n - a_m = (n-m)d\text{，其中}m\text{、}n\text{是正整数}$$

信心，坚持2小时在线

例题精练

1. 下列通项公式表示的数列为等差数列的是（　　）.

A. $a_n=\dfrac{n}{n-1}$　　B. $a_n=n^2-1$　　C. $a_n=5n+(-1)^n$

D. $a_n=3n-1$　　E. $a_n=\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}$

三、等差数列下标和定理

观察以下式子：

$$a_1+a_6=2a_1+5d$$
$$a_2+a_5=2a_1+5d$$
$$a_3+a_4=2a_1+5d$$

由此可得等差数列最重要的结论——下标和定理：

$m+n=p+q$, 则 $a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in N^*)$.

特殊地, 当 $p=q$ 时, $a_m+a_n=2a_p$.

即：当等差数列的两项下标之和相等时，这两项之和也相等.

例：$a_1+a_5=a_2+a_4=a_3+a_3=2a_3$

信心，坚持 2 小时在线

思考以下式子是否恒成立？

$$a_1 + a_5 = a_6$$

【注意】上式是同学们做题时容易出现的错误，下标和定理必须是两项之和等于两项之和.

等差中项：若a、b、c是等差数列，则由下标和定理可得：$a+c=2b$，其中称b为a、c的**等差中项**.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

2. 已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2-a_5+a_8=9$，则$a_1+a_2+\ldots+a_9=$（　）.

A. 27　　B. 45　　C. 54　　D. 81　　E. 162

信心，坚持 2 小时在线

四、等差数列前n项和公式

1. 根据下标和定理可以推导出以下式子：

$$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_6)+(a_2+a_5)+(a_3+a_4)=3(a_1+a_6)=\frac{6}{2}(a_1+a_6)$$

$$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_1+a_5)+(a_2+a_4)+a_3=\frac{5}{2}(a_1+a_5)$$

观察可得，等差数列的前n项和公式：

写法一：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

这个公式的简单记忆方法：二分之n乘首项加尾项，所以计算S_n时，只需要知道a_1和a_n即可.

例：已知a_n=$2n-3$，则a_1=-1,a_5=7，所以S_5=$\frac{(-1+7)\cdot 5}{2}$ =15

2. 在上例中，我们发现$S_5=5a_3$，这看上去是一个很有用的性质，观察以下式子：

$$S_7=\frac{7}{2}(a_1+a_7)=\frac{7}{2}\times 2a_4=7a_4$$

$$S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}\times 2a_5=9a_5$$

由此可得计算等差数列前n项和S_n时，非常有用的一个技巧：

若a_n为等差数列，当n为奇数时，$S_n=na_k$，其中k为$1\sim n$的中位数，即$k=\frac{n+1}{2}$

例：考试中常见的有：$S_3=3a_2, S_7=7a_4, S_9=9a_5, S_{11}=11a_6, S_{19}=19a_{10}$

3. 等差数列前n项和公式的另外两种写法(了解)：

把a_n的通项公式代入写法一,得写法二：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

将写法二整理成关于n的二次式，得写法三：$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

写法三即为写法二的展开形式，考试中个别题目使用这个形式更方便，通过这个形式我们知道：等差

数列前n项和S_n是关于n的二次函数.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

3. 若等差数列$\{a_n\}$满足$5a_7-a_3-12=0$，$S_{15}=$（　）.

A. 15　　B. 24　　C. 30　　D. 45　　E. 60

五、两个等差数列S_n之比问题

我们已经知道以下结论：

若a_n为等差数列，当n为奇数时，S_n=na_k，其中k为$1\sim n$的中位数，即k=$\dfrac{n+1}{2}$

这个结论也可写成：若a_n为等差数列，则$S_{2k-1}=(2k-1)a_k$

则显然也有以下结论：

若两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前$2k-1$项和分别用S_{2k-1}和T_{2k-1}表示，则$\dfrac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}=\dfrac{a_k}{b_k}$.

例：$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是等差数列，S_n、T_n 分别是他们的前n项和，则 $\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{9a_5}{9b_5}=\dfrac{a_5}{b_5}$.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

4. $\{a_n\}$的前n项和S_n与$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$S_{19}:T_{19}=3:2$.

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列；

（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$.

A. 1 充分 2 不充分；B. 1 不充分 2 充分；C. 1、2 都不充分，联合后充分；D. 1、2 单独都充分；E. 1、2 都不充分，联合后也不充分.

六、等差数列前n项和S_n的最值

思考：数列 3, 2, 1, 0，-1，-2，-3. . . . . 前n项和有无最值？

数列 3, 5, 2. 5, 1. 5, 0. 5. -0. 5, -1. 5. . . . . . 前n项和有无最值？

总结：（一）当$a_1<0, d>0$时，S_n有最小值.

（二）当$a_1>0, d<0$时，S_n有最大值.

（三）当a_n为 0 或者a_n变号（由负变正或者由正变负）时，S_n会出现最值.

【注】在往年的考试中从未出现过要求我们判断是最大值、或是最小值的情况，都是直接要求我们求出最大值或最小值，所以在应对前n项和最值问题时，只需要以下两个步骤——求S_n最值的思路：

①求$a_n=0$时n的值，此时S_n是最值.

②看a_n什么时候改变符号，若a_n和a_{n+1}符号相反（即$a_na_{n+1}<0$），则S_n是最值.

例①：求数列$a_n=2n-6$的最值：观察可知$a_3=0$，所以最值为$S_3=\frac{3}{2}(a_1+a_3)=-6$

例②：求数列$a_n=2n-5$的最值：观察可知$a_2<0$，$a_3>0$，所以最值为$S_2=a_1+a_2=-4$

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

5. 一个等差数列的首项为 21，公差为-3，则n项和S_n的最大值为（　　）.

A. 70　　B. 75　　C. 80　　D. 84　　E. 90

七、等差数列的判定问题

（1）定义法: $a_{n+1}-a_n=d.(d为常数,n\in N^*)$；　（特值法验证前三项$a_1$、$a_2$、$a_3$即可）

（2）通项公式法: $a_n=kn+b$，$(k,b为常数,n\in N^*)$;

因为$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d).(d为常数,n\in N^*)$；则 a_n 可表示为$a_n=kn+b,$其中k为等差数列的公差, 它可取任意实数.

（3）前n项和公式法: $S_n=an^2+bn(a,b为常数)$. 其中a,b可以为任意实数, 常数项为 0 是一大特点

例：①数列$a_n=3n$；②数列b_n的前n项和$S_n=2n^2+3n+1$，这两个数列是不是等差数列？

容易验证a_n是等差数列，而b_n不是等差数列（主要是因为b_1不符合通项公式）.

八、解决等差数列基本问题的思路：

（1）首选特殊值法.

（2）有两项相加，就用下标和定理.

（3）没有两项相加就用万能方法——即每一项全都用 a_1 和 d 表示.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

6. 若 6、a、c成等差数列，且 36、a^2、$-c^2$也成等差数列. 则$c=$(　　)

A、-6　　B、2　　C、3 或-2　　D、-6 或 2　　E、以上均不正确

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

7. 设 a_n 是等差数列，则能确定 $a_1+a_2+\ldots+a_9$ 的值.

（1）已知 a_1 的值.　　　　（2）已知 a_5 的值.

A. 1 充分 2 不充分；B. 1 不充分 2 充分；C. 1、2 都不充分，联合后充分；D. 1、2 单独都充分；E. 1、2 都不充分，联合后也不充分.