考研教辅

# 密训资料

考研教辅

硕士研究生

# 目录

# 第一章 实数的运算和性质

## 一、实数的运算

### 1.分类

实数的四则运算：满足加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律。还可定义实数的乘方和开方运算。

（1）乘方运算： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (ab)^n = a^n \cdot b^n, (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, (a^m)^n = a^{mn}$，

当 $a \neq 0$时，$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$。负实数的奇次幂为负数，负实数的偶次幂为正数。

（2）开方运算：在实数范围内，负实数无偶次方根；0 的偶次方根是 0；正实数的偶次方根有两个，且互为相反数。 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$， $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ，$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$， $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

**2.运算技巧**：（1）分母有理化；（2）裂项相消法；

## 二、实数的整除

能被 2 整除的数： 个位为偶数，0，2，4，6，8.

能被 3 整除的数： 各位数字之和必能被 3 整除.

能被 5 整除的数： 个位为 0 或 5.

能被 9 整除的数： 各位数字之和必能被 9 整除.

能被 10 整除的数：个位必为 0.

## 三、奇数与偶数

奇数 ± 奇数=偶数；奇数 ± 偶数=奇数；偶数 ± 偶数=偶数；

奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数；

注意：关于奇偶数运算的问题通常从“有偶数参加的乘法一定等于偶数”这个角度入手.

## 四、质数与合数

1.质数：只有 1 和它本身两个因数的正整数叫做质数（也称素数）.例：2,3,5，7，11,13,17,19・・・

合数：除了 1 和它本身外，还有其他因数的正整数叫做合数.例：4,6,8，9，10,12,14,15・・・

2.性质：

（1）质数、合数的研究范围是正整数，所以 1 既不是质数也不是合数；

（2）2 是唯一的偶质数；

（3）4 是最小的合数.

（4）注意：除了 2，其他质数都是奇数，所以关于质数、合数运算的问题一定跟 2 有关，例： $a$ 、$b$ 都是质数，且 $a+b$ 是奇数，那么可以知道 $a$ 和 $b$ 有一个是 2.

## 五、倍数与约数

1.倍数、约数：当 $a$ 能被 $b$ 整除时，则 $a$ 为 $b$ 的倍数， $b$ 为 $a$ 的约数.

2.公因数与最大公因数：如果整数 $b$ 既是整数 $a$ 的因数，同时也是整数 $c$ 的因数，则称 $b$ 为 $a$ 和 $c$ 的公因数. 公因数中最大的一个称作这两个数的最大公因数.（公因数只有 1 的两个数称为：互质，如 3 和 5）

3.公倍数与最小公倍数：如果整数 $b$ 能被整数 $a$ 整除，同时也能被整数 $c$ 整除，则称 $b$ 为 $a$ 和 $c$ 的公倍数. 公倍数中最小的一个称作这两个数的最小公倍数.

4.定理：两个整数的乘积等于两数的最大公因数和最小公倍数的乘积.

5.最大公因数和最小公倍数的求法——短除法.

例：求 42 与 48 的最大公因数和最小公倍数：先找 42 与 48 的公因数 2，商为 21、24；再找 21 和 24 的公因数 3，商为 7、8；由于 7 和 8 互质，则短除法结束.在短除法结束后，左侧的 2×3 就是最大公因数，左侧和下方数相乘 2×3×7×8=就是最小公倍数.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 42 & 48 \\ \hline 3 & 21 & 24 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

## 六、平均数

（1）算术平均值： n 个实数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，$x_n$ 的算术平均值为 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}$ 。

（2）几何平均值： n 个正实数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，$x_n$的几何平均值为 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n}$ 。

## 七、比与比例

1.定义：

（1）比：$a:b=\dfrac{a}{b}=k$

增长率$p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$现值$a(1+p\%)$、下降率$p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$现值$a(1-p\%)$、$\text{甲比乙大}p\%\Leftrightarrow\dfrac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}}=p\%$

$\text{甲是乙的}p\%\Leftrightarrow\text{甲}=\text{乙}\cdot p\%$

（2）比例：$a:b=c:d$ 或$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

2.性质

（1）比：①$a:b=k\Leftrightarrow a=kb$ ②$a:b=ma:mb \quad (m\neq 0)$

（2）比例（比例外项之积=比例内项之积）

①$a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$

②$a:b=c:d\Leftrightarrow b:a=d:c\Leftrightarrow b:d=a:c\Leftrightarrow d:b=c:a$

3.定理

（1）更比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

（2）反比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$

（3）合比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$

（4）分比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

（5）等比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\Rightarrow\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=\dfrac{a}{b}.(b+d+f\neq 0)$（易错点：容易忘记等比定理使用条件。）

## 八、绝对值

1.几何意义：$|a|$表示在数轴上$a$点与原点0的距离，$|a-b|$表示在数轴上$a$点与$b$点的距离，$|a+b|$表示数轴上点$a$与点$-b$的距离.

2.代数意义：$|a|=\begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$

3.绝对值性质

（1）非负性:$|a|\ge 0$，任何实数$a$的绝对值非负.

（2）对称性:$|-a|=|a|$；$|a-b|=|b-a|$，互为相反数的两个实数的绝对值相等.

（3）自比性:$\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{a}{|a|}=\begin{cases} +1, & a>0 \\ -1, & a<0 \end{cases}$

注意：绝对值的自比性通常与以下性质结合考查：①若$abc>0$，则三个数都为正，或两负一正；②若$abc<0$，则三个数都为负，或两正一负.

（4）等价性：①根号与平方：$\sqrt{a^2}=|a|$、②去绝对值：$|a|^2=|a^2|=a^2$

4.绝对值三角不等式：

$|a+b|\le|a|+|b|(ab\ge 0\text{时等号成立})$，$|a-b|\le|a|+|b|(ab\le 0\text{时等号成立})$.

记忆方法：把$|a+b|$、$|a|$、$|b|$当成三角形的三条边，两边之和大于第三边.

# 第二章 整式与分式

## 一、整式

**1.实整式加减运算**的运算步骤：（1）去括弧 （2）合并同类项

**2.整式乘法运算的基本公式**

① 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

② 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

③ 立方和不立方差公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

④ 三元完全平方和公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

⑤ 完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 、 $(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

⑥ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=2\left[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right]$

⑦ $a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{n-1})$

**3.整式除法运算**

（1）余式定理（非整除）：由于余式的次数要小于除式，因此当除式为一次表达式时，余式为常数.

即，$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 除以一次因式 $(x-a)$ 所得的余数一定是 $F(a)$ .

（2）因式定理（整除）：$F(x)$ 含有因式 $(x-a)$（即整除），则 $F(a)=0$

**4.多项式的因式分解**

法一：提取公因式法：公因式是多项式中各项都含有的相同的因式，即各项中系数的最大公约数与相同字母的最低次幂的乘积。$ax+bx+cx=x(a+b+c)$

法二：公式法：乘法公式从右到左，即为因式分解公式。

法三：分组分解法：原则：（1）分组后，能产生公因式；（2）分组后，能运用公式法；（3）分组后，能应用十字相乘法。常用有“一三”分组或“二二”分组法。

【例题】
$$a^5+a^2-a^3-1=a^3(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(a^3+1)$$
$$=(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$$

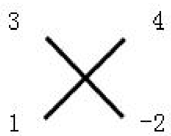
法四：十字相乘法：

$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$，其中 $p=a+b,q=ab$，

$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，其中 $a=a_1a_2,c=c_1c_2$，并且 $b=a_1c_2+a_2c_1$。

【例题】将 $3x^2-2x-8$ 因式分解

解：二次项的系数分解为 3=1*3，  常数项-8=（-2）*4，




所以 $3x^2-2x-8$ =（x-2）（3x+4）

法五：求根法：若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots x_n$，则多项式

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$。

注意：涉及到因式分解的问题，首先考虑首尾项检验法！！即：原式最高次项系数，一定等于各因式的最高次项系数之积；原式的常数项，一定等于各因式常数项之积。

## 二、分式

**1.性质**：分式的分子和分母同乘以（或除以）同一个不为零的式子，分式的值不变，即有 $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}(m\neq0)$

**2.运算**

（1）加减运算：同分母的几个分式相加减，分母不变，分子相加减；不同分母的几个分式相加减，取这几个分式分母的公分母作分母，通分后化为同分母分式的加减运算.

（2）乘除运算：几个分式相乘，运算法则是分子乘分子，分母乘分母.分式的乘法运算满足交换律、结合律和对加减法的分配律.两个分式相除，将除式的分子分母颠倒位置变为乘法运算.

**3.分式方程的解法**：解分式方程的关键是去分母，将分式方程转化为整式方程.

4.分式常见的应用

（1）形如已知 $x+\frac{1}{x}=a$ 或 $x^2-ax+1=0$，求高次代数式的问题.

整理成 $x^2=ax-1$ 形式，代入整式，迭代降次即可.

（2）裂项相消法：常用于当题干中出现多个分数求和的情况。

原理：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$

# 第三章 方程、函数与不等式

## 一、方程

1.一元一次方程：形如 ax=b 的方程的解法

（1）当 a≠0 时，原方程的解为 x=b/a；

（2）当 a=0，b≠0 时，不存在 x 值使等式成立，原方程无解；

（3）当 a=0，b=0 时，即 0x=0，则原方程的解为全体实数。

2.二元一次方程组：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$

（1）加减消元法

将 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$，消去 y（也可以消去 x），得：$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

从中解出 x，再将 x 的值代入（1）或（2），求出 y 的值，从而得出方程组的解。

（2）代入消元法

由（1）得 $y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$ $(b_1\neq 0)$，将其代入（2），消去 y，得到关于 x 的一元一次方程，解之。

3.一元二次方程：$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

（1）解法

1）因式分解法：把方程化为形如 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的形式，则解为 $x=x_1$ 或 $x=x_2$。

2）公式法：由 $ax^2+bx+c=0$ （a≠0），得 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（求根公式，$\Delta=b^2-4ac\geq 0)$

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac\begin{cases} >0，有两个不相等实数根； \\ =0，有两个相等的实数根； \\ <0，没有实数根。 \end{cases}$

（2）根与系数的关系（韦达定理）

设 $x_1, x_2$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0，$\Delta \geq 0$)的两个根，则

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1x_2\text{是方程} \\ ax^2+bx+c=0\text{的} \\ \text{两根}(a\neq 0,\Delta\geq 0) \end{array}} \rightleftarrows \boxed{\begin{array}{l} x_1+x_2=-b/a \\ x_1\cdot x_2=c/a \end{array}}$$

（3）根的分布或位置

1）可利用韦达定理

方程有两个正根 $\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$；有两个负根 $\begin{cases} x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$；一正一负根 $\begin{cases} x_1\cdot x_2<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

2）数形结合（常用）

（1）两根属于同一连续区间，有 3 条件：Δ≥0,；对称轴在区间内；端点函数值的正负。

（2）两根分属于两个不连续区间，只需端点函数值的正负。

（3）两根在一点两侧，只需一个式子：判断该点函数值正负。

（4）两不等根都在某点的同侧，需要用的式子：判别式大于零，判断该点函数值正负，对称轴在该点一侧。

## 二、不等式

### 1.不等式的基本性质

（1）a>b,c>0，则 ac>bc，　a>b,d<0，则 ad<bd；

（2）传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

（3）同向皆正相乘性：$\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ c>d>0 \end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$；

（4）同向相加性：$a>b,c>d$,则有$a+c>b+d$;

（5）皆正倒数性：$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$；

（6）皆正乘方性：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$　($n$为正整数)；

### 2.一元一次不等式

（1）一元一次不等式的解法：　$ax>b(a\neq 0)\begin{cases} a>0\text{时}\quad x>\frac{b}{a} \\ a<0\text{时}\quad x<\frac{b}{a} \end{cases}$

（2）一元一次不等式组的解法：分别求出组成不等式组的每一个一元一次不等式的解集后，求这些解集的交集（可以运用数轴，直观地求出交集）。

3.一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0 \quad (a>0)$

$ax^2+bx+c<0 \quad (a>0)$

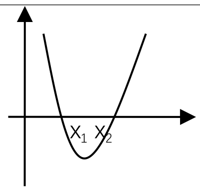
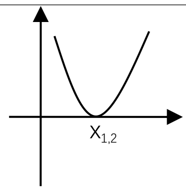
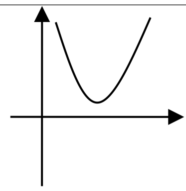
（1）解与一元二次方程的根的关系

设方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有两个不等实根 $x_1,x_2$，且$x_1<x_2$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<x_1$或$x>x_2$；$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x_1<x<x_2$。

注意：若不等式二项式系数 $a<0$，可化为正值再求解集。 若不等式带等号（即≤或≥），则只需在解集中增加两个根即可。

（2）一元二次不等式的图像解法

依表中开口向上的抛物线 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的不同位置求解。

| △= b² - 4ac | △>0 | △= 0 | △< 0 |
|---|---|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ |  |  |  |
| f(x) = 0 根 | $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ | 无实根 |
| f(x) > 0 解集 | $x < x_1$ 或 $x > x_2$ | $x\neq-\frac{b}{2a}$ | $x\in R$ |
| f(x)<0 解集 | $x_1 < x < x_2$ | $x\in\phi$ | $x\in\phi$ |

三、函数

1.集合

（1）几种集合的命名：

空　集：不包含任何元素的集合叫做空集，用∅表示.

自然数集：N　　　　正整数集：N*或 N+　　　　整数集：Z；

有理数集：Q；　　　实数集：R.

（2）集合的区间表示

$\{x|a<x<b\}$可表示为$x\in(a,b)$

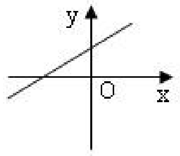
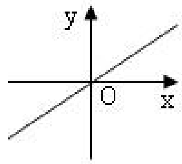
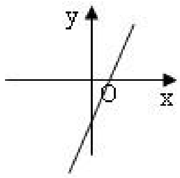
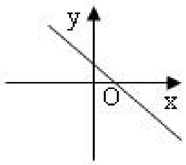
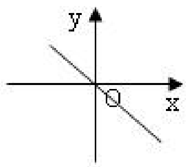
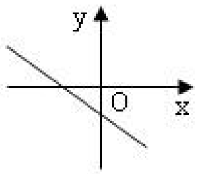
$\{x|a\le x<b\}$可表示为$x\in[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$可表示为$x\in(a,b]$

$\{x|a\le x\le b\}$可表示为$x\in[a,b]$

2.一次函数　y=kx+b（k≠0）

| k,b 的符号 | 函数图像 | 图像的位置 | 性质 |
|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| k>0 | b>0 |  | 图像过第一，二，三象限 | y 随 x 的增大而增大 |
| | b=0 |  | 图像过第一，三象限 | |
| | b<0 |  | 图像过第一，三，四象限 | |
| k<0 | b>0 |  | 图像过第一，二，四象限 | y 随 x 的增大而减小 |
| | b=0 |  | 图像过第二，四象限 | |
| | b<0 |  | 图像过第二，三，四象限 | |

3.二次函数

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$

（2）顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

（3）交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

系数 $a,b,c$ 和 $y=ax^2+bx+c$ 的关系

1）$a$ 决定开口方向，当 $a>0$，抛物线开口向上；当 $a<0$，抛物线开口向下；

2）对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$， $a$ 和 $b$ 决定对称轴在 $y$ 轴的左侧或右侧，

重要推论：当 $a$ ，$b$ 同号，对称轴在 $y$ 轴左侧；当 $a$ ，$b$ 异号，对称轴在 $y$ 轴右侧；当 $b=0$ 时，对称轴即 $y$ 轴。

# 第四章 应用题

## 一、利润及百分比问题

### 1.变化率概念

$$变化率=\frac{变化量}{变前量}\times 100\%=\frac{|现值-原值|}{原值}\times 100\%$$

设原值为 $a$ ，变化率为 $p\%$ ，若上升 $p\%$ ，则现值 $=a(1+p\%)$ ，若下降 $p\%$ ，则现值 $=a(1-p\%)$ .

### 2.利润问题

（1）利润 = 售价 – 进价；

（2）$利润率=\frac{利润}{成本(进价)}\times 100\%=\frac{售价-成本}{成本}\times 100\%=(\frac{售价}{成本}-1)\times 100\%$；

（3）售价=成本+利润=成本×(1+利润率）.

（4）亏损 = 进货价−售价

（5）亏损率 =（进货价 – 售价）÷ 进货价 × 100%

## 二、行程问题

### 1、基本公式

路程 = 速度 × 时间；　　路程 ÷ 时间 = 速度；　　路程 ÷ 速度 = 时间.

### 2、相遇及追击问题

**（1）直线运动**

①相遇：两人相向而行，在中途相遇：设甲乙两人在一段路程上行走，他们的速度分别为 $v_1,v_2$ ，相遇时两人走过的路程为 $S_1,S_2$ ，相遇时所用时间为 $t$ ，则 $t=\frac{S_1+S_2}{v_1+v_2}$ .

②追击：甲乙两人从同一起点行走，甲先走了一段路程 $S$ 后，乙沿同样的路程去追甲，乙追上甲所用时间为 $t$ ，他们的速度分别为 $v_1,v_2\left(v_1<v_2\right)$ ，则 $t=\frac{S}{v_2-v_1}$ .

③列车问题，注意条件，合理计算火车的长度

火车过桥：过桥时间 =（车长 + 桥长）÷ 车速

火车追及：追及时间（超过）=（甲车长 + 乙车长 + 距离）÷（快速 – 慢速）

追及时间（追及）= 距离 ÷（快速 – 慢速）

火车相遇：相遇时间 = 距离 ÷（甲车速 + 乙车速）

**（2）圆周运动（设圆周长为 $S$ ）**

①甲乙从同一点开始同向运动：则 $S_{甲}-S_{乙}=S$ ，甲乙每相遇一次，甲比乙多跑一圈，若相遇 $n$ 次，则有 $S_{甲}-S_{乙}=n\cdot S$ ；

②甲乙从同一点开始相背运动：则 $S_{甲}+S_{乙}=S$，甲乙每相遇一次，甲与乙路程之和为一圈，若相遇 $n$ 次有 $S_{甲}+S_{乙}=n\cdot S$.

## 三、相对速度问题

顺水逆水问题原理：

$$\begin{cases} V_{顺}=v_{船}+v_{水} \\ V_{逆}=v_{船}-v_{水} \end{cases} \Rightarrow V_{顺}-V_{逆}=2\,v_{水}$$

也可以理解为：

（顺水速度＋逆水速度）÷2＝船速

（顺水速度－逆水速度）÷2＝水速

## 四、工程问题

工作量＝工作效率×工作时间

工作时间＝工作量÷工作效率

工作时间＝总工作量÷（甲工作效率＋乙工作效率）

解题思路和方法：发通后可以利用上述数量关系的公式，两种方法：

法①：没有给具体每个人的工作量问题，设总量为“1”；

法②：已知每个人的工作量，设总量为已知量的最小公倍数。

## 五、平均值问题（十字相乘法）

原理：设一个整体可分成 A、B 两部分，A 部分的数值有 $x$ 个 $a$，B 部分的数值有 $y$ 个 $b$，A+B 的平均值为 $c$，则我们可用十字交叉法来求 A、B 数量之比：

A：　a　＼　　　c－b
　　　　　　C　／
B：　b　／　　　＼a - c

## 六、溶液问题

**1、解题原理：**

（1）溶液=溶质+溶剂

（2）浓度 $=\dfrac{溶质}{溶液}\times100\%$

2、方法

**（1）利用十字相乘法速解混合溶液比例问题**

设混合前浓溶液的质量为 m，溶质质量分数为 a%，稀溶液的质量为 n，溶质质量分数为 b%，两溶液混合后的溶质质量分数为 c%：则： $ma\%+nb\%=(m+n)c\%$ ，化简为： $\frac{m}{n}=\frac{c-b}{a-c}$

本式可用下面十字交叉形式表示：

$$\begin{array}{ccc} a & & c-b \\ & c & \\ b & & a-c \end{array}$$

这种方法也称“对角线法”，其中 c 必项是已知量。若用于纯溶剂(如水)稀释，则可把纯溶剂中溶质质量分数当作 0，若加入的是纯溶质，则可把溶质质量分数看作 100%。

**（2）稀释问题超级计算公式，利用超级公式速解求稀释体积等相关问题 （$c_0$为原浓度，$c_n$为新浓度）**

1）设已知溶液质量为 M，每次操作中先倒出 $M_0$g 溶液，再加入 $M_0$g 溶剂（清水），重复 n 次，

$$c_n = c_0\left(\frac{M-M_0}{M}\right)^n = c_0\left(1-\frac{M_0}{M}\right)^n$$

2）设已知溶液质量为 M，每次操作中先倒入 $M_0$g 溶剂（清水），再倒出 $M_0$g ，溶液重复 n 次，

$$c_n = c_0\left(\frac{M}{M+M_0}\right)^n$$

# 第五章 数列

## 一、数列

项公式 $a_n$ 和前 n 项和 $S_n$ 之间的关系

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\quad a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & n=1 \\ S_n\text{-}S_{n-1} & n \ge 2 \end{cases}$$

## 二、等差数列

1.**定义**：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个等差数列的公差，记做 d。即：$a_{n+1} - a_n = d.(d\text{为常数}, n \in N^*)$; 。

2.**通项公式**

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2)$

$a_n=a_m+(n-m)d$

$a_n=d\cdot n+(a_1-d)$

$n=(a_n-a_1)/d+1$

$d=(a_n-a_m)/(n-m)$

$$a_{\frac{n+m}{2}} = \frac{a_n + a_m}{2}$$

3.**前 n 项和公式**：$S_n = \dfrac{(a_1+a_n)n}{2} = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

4.**等差中项**：如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项，即 $A = \dfrac{a+b}{2}$.

中项公式：$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}.(n \in N^*)$

5.下标和定理：若 $m+n=p+q$ ,则 $a_m + a_n = a_p + a_q(m,n,p,q \in N^*)$ .特殊地，当 $p=q$ 时，$a_m + a_n = 2a_p$ 。注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。

## 三、等比数列

**1.定义**：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的商等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做这个等比数列的公比，记做 q。即：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（$q$为非零常数）

2.**通项公式**：$a_n=a_1q^{n-1}$（$q$为常数，$n\in N^*$）； 推广：$a_n=a_mq^{n-m}$（$q$为常数，$n$、$m\in N^*$）.

**3.前 n 项和**：$S_n=\begin{cases} na_1.(q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{或} \frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1) \end{cases}$

4.等比中项：如果 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项，$G=\pm\sqrt{ab}$，显然$ab>0$。

中项公式：$a_{n+1}^2=a_n\bullet a_{n+2}\left(n\in N^*\right)$

5.下标和定理：$\{a_n\}$为等比数列，若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q\,(m,n,p,q\in N^*)$.特殊地，当 p=q 时，$a_m\cdot a_n=a_p{}^2$.

注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。

# 第六章 几何部分

## 一、平面几何

**1.三角形**

（1）三角形内角和定理：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

（2）三角形三边关系：三角形任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

（3）三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

（4）三角形面积公式：

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}(\text{海仑公式})\text{，其中 }2p=a+b+c$$

其中$h$是$a$边上的高，$\angle C$是$a,b$边所夹的角，$p$为三角形的半周长.

（5）中线：三角形中，连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线。

（6）角平分线：三角形的一个内角的平分线与它的对边相交，连接这个角的顶点和交点之间的线段叫三角形的角平分线。

（7）高线：从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线做垂线,顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高线）

**2.四边形（平行四边形）**

（1）四边形的**内角和**等于 360°

多边形内角和定理：n 边形的内角的和等于（n−2）×180° .

推论：多边形的外角和是 360° .

（2）平行四边形的性质

①平行四边形的对边平行且相等，对角相等；

②平行四边形的对角线互相平分。

③若平行四边形两边长是$a$，$b$，以$b$为底边的高为$h$，则面积为$S=bh$，周长$l=2(a+b)$.

（3）矩形两边长为 a,b,面积 S =ab,周长 C = 2(a+b)，对角线$l=\sqrt{a^2+b^2}$.

（4）菱形四边长都为 a，以 a 为底边的高为 h，面积 $S=ah=\frac{1}{2}l_1l_2$（$l_1,l_2$ 为两条对角线的长），周长 C = 4a。

（5）梯形上底为 a，下底为 b，高为 h，中位线 $l=\frac{1}{2}(a+b)$，面积 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

3.圆

（1）圆的定义：圆是到定点的距离等于定长的点的集合

（2）周长为 $C=2\pi R$，面积是 $S=\pi R^2$.

（3）切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径

（4）扇形：一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫扇形.

①在扇形 OAB 中，若圆心角为 $n^0$，则 AB 弧长 $l=\frac{n\pi R}{180}$，扇形面积 $S=\frac{n\pi R^2}{360}$

②若圆心角为 $\theta$ 弧度，则 AB 弧长 $l=R\theta$，扇形面积 $S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}R^2\theta$

## 二、立体几何

1.长方体

设长方体在同一个顶点上的三条棱长分为 a，b，c

（1）体积 $V=abc$

（2）全面积：$S_{全}=2(ab+bc+ac)$

（3）体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

（4）当 $a=b=c$ 时，称为正方体，$V=a^3$，$S_{全}=6a^2$，$d=\sqrt{3}a$

2.圆柱体

设圆柱的高为h，底面圆半径是r

(1) 体积：$V=\pi r^2\cdot h$

(2) 侧面积：$S_{侧}=2\pi r\cdot h$（r为底面圆的半径，h为圆柱的高）

其侧面展开图为一个长为$2\pi r$，宽为$h$的长方形。

（3）全面积：$S_{全}=S_{侧}+S_{(上底+下底)}=2\pi r\cdot h+2\pi r^2$

3.球体

设球的半径为 R：

（1）球的表面积公式：$S_{表}=4\pi R^2$或$S_{表}=\pi D^2$（$D$是球的直径）

（2）球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$或$V=\frac{1}{6}\pi D^3$（$D$是球的直径）

## 三、平面解析几何

1.两点之间距离公式

在平面直角坐标系中，设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2.中点坐标公式

点 $P(x,y)$ 是线段 $P_1P_2$ 的中点，其中 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则 P 点坐标为 $x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}$。

*求坐标：

（1）定性分析：看坐标所在的象限；

（2）代数关系：坐标为对应方程的根；

（3）几何关系：坐标(x，y)中， |x|表示在 x 轴上投影的距离， |y|表示在 y 轴上投影的距离；
（4）定量计算：联立求解相交的两个方程。

3.直线的倾斜角与斜率

过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,(x_1\neq x_2)$.

4.直线的方程

（1）点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$（直线 $l$ 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 $k$）.
（2）斜截式：$y=kx+b$，斜率为 $k$，在 y 轴上的截距为 $b$。
（3）一般式：$Ax+By+C=0$(其中 A、B 不同时为 0)。 斜率为：$-\dfrac{A}{B}$
（4）两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$
（5）截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（已知 $x$ 轴上的截距为 $a$， $y$ 轴上的截距为 $b$ ）

*求直线方程：
（1）定性分析：先看斜率，再看截距；
（2）代数关系：直线方程应满足相对应的点；
（3）定量计算：点、斜式；
（4）斜率的计算：平行？垂直？两个点？倾斜角？

5.两直线的位置关系

（1）相交

求交点：联立 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一一组实数解。

（2）平行

①若 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$； $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\neq b_2$

②若 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. $l_1//l_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

（3）垂直

①若 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$； $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$

②若 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

（4）两条平行直线的距离公式

直线 $l_1$： $Ax+By+C_1=0$ 平行于直线 $l_2$： $Ax+By+C_2=0$，则它们之间的距离为： $d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

6.点到直线的距离公式

平面内一点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离公式： $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

7.点和圆、直线和圆、圆与圆的位置关系

（1）点 $P(x_0,y_0)$ 与圆的位置关系

1）对于圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，若 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则有：

$d>r\Leftrightarrow$ 点 $P$ 在圆外；

$d=r \Leftrightarrow$ 点 $P$ 在圆上;
$d<r \Leftrightarrow$ 点 $P$ 在圆内。
2）对于圆的一般方程: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则有:
$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0 \Leftrightarrow$ 点P在圆内;
$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0 \Leftrightarrow$ 点P在圆上;
$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0 \Leftrightarrow$ 点P在圆外。
**（2）直线与圆的位置关系有三种:** （本质是求点到直线的距离）
直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系: 圆心到直线的距离: $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
$d>r \Leftrightarrow$ 相离;　$d=r \Leftrightarrow$ 相切;　$d<r \Leftrightarrow$ 相交
**（3）圆与圆的位置关系有五种:** （本质是求两点之间距离）
设两圆圆心分别为 $O_1$、$O_2$，半径分别为 $r_1,r_2$。$|O_1O_2|=d$
$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线;
$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线;
$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线;
$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线;
$0\le d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线

# 第七章 数据分析

## 一、排列组合

### 1.两个基本原理

**（1）加法（分类）原理**

如果完成一件事有 n 类办法,只要选择其中任何一类办法中的任何一种方法,就可以完成这件事.若第一类办法中有 $m_1$ 种不同的方法,第二类办法中有 $m_2$ 种不同的方法，……，第 n 类办法中有 $m_n$ 种不同的办法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

**（2）乘法（分步）原理**

如果完成一件事，必须依次连续地完成 n 个步骤，这件事才能完成.若完成第一个步骤有 $m_1$ 种不同的方法，完成第二个步骤有 $m_2$ 种不同的方法，……，完成第 n 个步骤有 $m_n$ 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法.

### 2.排列与排列数

（1）从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素(m≤n)的所有排列的种数，称为从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个不同元素的排列数，记作 $\mathrm{P}_n^m$，其中 $\mathrm{P}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.有 $\mathrm{P}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

当 m＝n 时，$P_n^n=n!$。

**（2）使用条件:**

1) n 个不同元素
2) 任取 m 个
3) 讲究顺序

### 3.组合与组合数

（1）从 $n$ 个不同元素中，取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有组合的种数，称为从 $n$ 个不同元素中，取出 $m$ 个不同

元素的组合数，记作$C_n^m$，其中$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

关于组合数，我们需要掌握公式：$C_n^m=C_n^{n-m}$.

（2）使用条件：

1) n 个不同元素

2) 任取 m 个

3) 并为一组，不讲顺序

## 二、概率初步

### 1.概率基本概念

（1）定义：所谓事件 A 的概率是指事件 A 发生可能性程度的数值度量，记为$P(A)$，显然$0\le P(A)\le 1$。

（2）概率的性质

性质 1（加法公式）：对任意事件 A，B，有$P(AUB)=P(A)+P(B)-P(AB)$.若 A,B 互斥，则$P(AUB)=P(A)+P(B)$.

性质 2（对立事件公式）：对任意事件 A，$P(\overline{A})=1-P(A)$.

### 2.古典概型

如果在一次试验中，所有可能出现的基本事件只有有限个，并且每个基本事件出现的可能性相等，我们就把具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

古典概型的概率计算公式为 P(A) $=\frac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$.

### 3.事件的独立性

独立事件：设 A,B 是两个事件，如果事件 A 的发生和事件 B 的发生互不影响，则称两个事件是相互独立的。对于相互独立的事件 A 和 B，有$P(AB)=P(A)P(B)$。

### 4.贝努利概型

在贝努利概型中，若设$q=1-p$，则在$n$次试验中事件 A 恰好发生$k(0\le k\le n)$次的概率为：$P_n(k)=C_n^kP^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots n)$.

## 三、数据描述

### 1.（算术）平均数

**定义**：有$n$个数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，称$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这$n$个数的算术平均数（也称平均数），记做$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$.

基本定理：当$x_1,x_2,\cdots,x_n$为 n 个正数时，他们的算术平均值不小于几何平均值，即$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立。

### 2.中位数

将$n$个数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，按从小到大的顺序依次排列，当$n$为奇数时，处在最中间的那个数（$x_{\frac{n+1}{2}}$）是这组

数据的中位数；当 $n$ 为偶数时，处在最中间的两个数的平均数（$\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$）是这组数据的中位数.

3.方差与标准差

（1）定义：设 $\overline{x}$ 是 $n$ 个数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均数，方差：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$

（2）标准差（也称均方差），记做 $s$，$s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]}$

它是用来衡量一组数据波动的大小。样本方差、标准差体现了总体的分散程度。