管理类联考数学

目录

第一章 实数的运算和性质

一、实数的运算

1.分类

实数的四则运算：满足加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律。还可定义实数的乘方和开方运算。

（1）乘方运算：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (ab)^n = a^n \cdot b^n, (\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}, (a^m)^n = a^{mn}$，

当 $a \neq 0$时，$a^0 = 1, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。负实数的奇次幂为负数，负实数的偶次幂为正数。

（2）开方运算：在实数范围内，负实数无偶次方根；0 的偶次方根是 0；正实数的偶次方根有两个，且互为相反数。 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$， $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ，$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$， $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

2.运算技巧：（1）分母有理化：（2）裂项相消法：

二、实数的整除

能被 2 整除的数： 个位为偶数，0，2，4，6，8.

能被 3 整除的数： 各位数字之和必能被 3 整除.

能被 5 整除的数： 个位为 0 或 5.

能被 9 整除的数： 各位数字之和必能被 9 整除.

能被 10 整除的数：个位必为 0.

三、奇数与偶数

奇数±奇数=偶数；奇数±偶数=奇数；偶数±偶数=偶数；

奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数；

注意：关于奇偶数运算的问题通常从“有偶数参加的乘法一定等于偶数”这个角度入手.

四、质数与合数

1.质数：只有 1 和它本身两个因数的正整数叫做质数（也称素数）.例：2,3,5，7，11,13,17,19…

合数：除了 1 和它本身外，还有其他因数的正整数叫做合数.例：4,6,8，9，10,12,14,15…

2.性质：

（1）质数、合数的研究范围是正整数，所以 1 既不是质数也不是合数；

（2）2 是唯一的偶质数；

（3）4 是最小的合数.

（4）注意：除了 2，其他质数都是奇数，所以关于质数、合数运算的问题一定跟 2 有关，例：a、b 都是质数，且 $a+b$ 是奇数，那么可以知道 a 和 b 有一个是 2.

五、倍数与约数

1.倍数、约数：当 a 能被 b 整除时，则 a 为 b 的倍数，b 为 a 的约数.

2.公因数与最大公因数：如果整数 b 既是整数 a 的因数，同时也是整数 c 的因数，则称 b 为 a 和 c 的公因数.公因数中最大的一个称作这两个数的最大公因数.（公因数只有 1 的两个数称为：互质，如 3 和 5）

3.公倍数与最小公倍数：如果整数 b 能被整数 a 整除，同时也能被整数 c 整除，则称 b 为 a 和 c 的公倍数.公倍数中最小的一个称作这两个数的最小公倍数.

4.定理：两个整数的乘积等于两数的最大公因数和最小公倍数的乘积.

5.最大公因数和最小公倍数的求法——短除法.

例：求 42 与 48 的最大公因数和最小公倍数：先找 42 与 48 的公因数 2，商为 21、24；再找 21 和 24 的公因数 3，商为 7、8；由于 7 和 8 互质，则短除法结束.在短除法结束后，左侧的 2×3 就是最大公因数，左侧和下方数相乘 2×3×7×8=就是最小公倍数.

2	42	48
3	21	24
	7	8

六、平均数

（1）算术平均值： n 个实数 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ 的算术平均值为 $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$ 。

（2）几何平均值： n 个正实数 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ 的几何平均值为 $x_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n}$ 。

七、比与比例

1.定义：

（1）比： $a:b = \dfrac{a}{b} = k$

增长率$p\%\xrightarrow{原值a}$ 现值$a(1\quad p\%)$、下降率$p\%\xrightarrow{原值a}$现值$a(1-p\%)$、

甲比乙大$p\% \Leftrightarrow \dfrac{甲-乙}{乙} = p\%$

甲是乙的$p\% \Leftrightarrow 甲 = 乙 \cdot p\%$

（2）比例： $a:b = c:d$ 或 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

2.性质

（1）比：①$a:b = k \Leftrightarrow a = kb$ ②$a:b = ma:mb \quad (m \neq 0)$

（2）比例（比例外项之积=比例内项之积）

①$a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc$

②$a:b = c:d \Leftrightarrow b:a = d:c \Leftrightarrow b:d = a:c \Leftrightarrow d:b = c:a$

3.定理

（1）更比定理： $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

（2）反比定理： $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

（3）合比定理： $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

（4）分比定理： $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

（5）等比定理： $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} \Rightarrow \dfrac{a+c+e}{b+d+f} = \dfrac{a}{b}.(b+d+f \neq 0)$ （易错点：容易忘记等比定理使用条件。）

八、绝对值

1.几何意义：$|a|$表示在数轴上a点与原点0的距离，$|a-b|$表示在数轴上a点与b点的距离，$|a+b|$表示数轴上点a与点$-b$的距离.

2.代数意义：$|a|=\begin{cases}a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0\end{cases}$

3.绝对值性质

（1）非负性:$|a|\geq 0$，任何实数a的绝对值非负.

（2）对称性:$|-a|=|a|$；$|a-b|=|b-a|$，互为相反数的两个实数的绝对值相等.

（3）自比性:$\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}+1, & a>0\\ -1, & a<0\end{cases}$

注意：绝对值的自比性通常与以下性质结合考查：①若$abc>0$，则三个数都为正，或两负一正；②若$abc<0$，则三个数都为负，或两正一负.

（4）等价性：①根号与平方：$\sqrt{a^2}=|a|$、②去绝对值：$|a|^2=|a^2|=a^2$

4.绝对值三角不等式:

$|a+b|\leq|a|+|b|(ab\geq 0\text{时等号成立})$，$|a-b|\leq|a|+|b|(ab\leq 0\text{时等号成立})$.

记忆方法：把$|a+b|$、$|a|$、$|b|$当成三角形的三条边，两边之和大于第三边.

第二章 整式与分式

一、整式

1.实整式加减运算的运算步骤：（1）去括弧　（2）合并同类项

2.整式乘法运算的基本公式

① 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

② 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

③ 立方和不立方差公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

④ 三元完全平方和公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

⑤ 完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$、$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

⑥ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=2\left[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right]$

⑦ $a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{n-1})$

3.整式除法运算

（1）余式定理（非整除）：由于余式的次数要小于除式，因此当除式为一次表达式时，余式为常数.

即，$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 除以一次因式 $(x-a)$ 所得的余数一定是 $F(a)$.

（2）因式定理（整除）：$F(x)$ 含有因式 $(x-a)$（即整除），则 $F(a)=0$

4.多项式的因式分解

法一：提取公因式法：公因式是多项式中各项都含有的相同的因式，即各项中系数的最大公约数与相同字母的最低次幂的乘积。$ax+bx+cx=x(a+b+c)$

法二：公式法：乘法公式从右到左，即为因式分解公式。

法三：分组分解法：原则：（1）分组后，能产生公因式；（2）分组后，能运用公式法；（3）分组后，能应用十字相乘法。常用有“一三”分组或“二二”分组法。

【例题】
$$a^5+a^2-a^3-1=a^3(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(a^3+1)$$
$$=(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$$

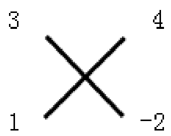
法四：十字相乘法：

$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$，其中 $p=a+b,q=ab$，

$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，其中 $a=a_1a_2,c=c_1c_2$，并且 $b=a_1c_2+a_2c_1$。

【例题】将 $3x^2-2x-8$ 因式分解

解：二次项的系数分解为 3=1*3， 常数项-8=（-2）*4，



所以 $3x^2-2x-8$ =（x-2）（3x+4）

法五：求根法：若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots x_n$，则多项式

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$。

注意：涉及到因式分解的问题，首先考虑首尾项检验法！！即：原式最高次项系数，一定等于各因式的最高次项系数之积；原式的常数项，一定等于各因式常数项之积。

二、分式

1.性质：分式的分子和分母同乘以（或除以）同一个不为零的式子，分式的值不变，即有 $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}(m\neq 0)$

2.运算

（1）加减运算：同分母的几个分式相加减，分母不变，分子相加减；不同分母的几个分式相加减，取这几个分式分母的公分母作分母，通分后化为同分母分式的加减运算.

（2）乘除运算：几个分式相乘，运算法则是分子乘分子，分母乘分母.分式的乘法运算满足交换律、结合律和对加减法的分配律.两个分式相除，将除式的分子分母颠倒位置变为乘法运算.

3.分式方程的解法：解分式方程的关键是去分母，将分式方程转化为整式方程.

4.分式常见的应用

（1）形如已知 $x+\frac{1}{x}=a$ 或 $x^2-ax+1=0$，求高次代数式的问题.

整理成 $x^2=ax-1$ 形式，代入整式，迭代降次即可.

（2）裂项相消法：常用于当题干中出现多个分数求和的情况。

原理：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$

第三章 方程、函数与不等式

一、方程

1.一元一次方程：形如 ax=b 的方程的解法

（1）当 a≠0 时，原方程的解为 x=b/a；

（2）当 a=0，b≠0 时，不存在 x 值使等式成立，原方程无解；

（3）当 a=0，b=0 时，即 0x=0，则原方程的解为全体实数。

2.二元一次方程组：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$

（1）加减消元法

将 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$，消去 y（也可以消去 x），得：$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

从中解出 x，再将 x 的值代入（1）或（2），求出 y 的值，从而得出方程组的解。

（2）代入消元法

由（1）得 $y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$ $(b_1\neq 0)$，将其代入（2），消去 y，得到关于 x 的一元一次方程，解之。

3.一元二次方程：$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

（1）解法

1）因式分解法：把方程化为形如 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的形式，则解为 $x=x_1$ 或 $x=x_2$。

2）公式法：由 $ax^2+bx+c=0$ （a≠0），得 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （求根公式，$\Delta=b^2-4ac\geq 0$）

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac\begin{cases} >0，有两个不相等实数根； \\ =0，有两个相等的实数根； \\ <0，没有实数根。 \end{cases}$

（2）根与系数的关系（韦达定理）

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0,\ \Delta\geq 0)$ 的两个根，则

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1x_2\text{是方程}\\ ax^2+bx+c=0\text{的}\\ \text{两根}(a\neq 0,\Delta\geq 0)\end{array}} \rightleftarrows \boxed{\begin{array}{l} x_1+x_2=-b/a\\ x_1\cdot x_2=c/a\end{array}}$$

（3）根的分布或位置

1）可利用韦达定理

方程有两个正根$\begin{cases} x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$； 有两个负根$\begin{cases} x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$； 一正一负根$\begin{cases} x_1\cdot x_2<0\\ \Delta>0\end{cases}$

2）数形结合（常用）

（1）两根属于同一连续区间，有 3 条件：Δ≥0,；对称轴在区间内；端点函数值的正负。

（2）两根分属于两个不连续区间，只需端点函数值的正负。

（3）两根在一点两侧，只需一个式子：判断该点函数值正负。

（4）两不等根都在某点的同侧，需要用的式子：判别式大于零，判断该点函数值正负，对称轴在该点一侧。

二、不等式

1.不等式的基本性质

（1）a>b,c>0, 则 ac>bc,　 a>b,d<0, 则 ad<bd；

（2）传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

（3）同向皆正相乘性：$\left.\begin{array}{l} a>b>0\\ c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$；

（4）同向相加性：$a>b,c>d,\text{则有}a+c>b+d$;

（5）皆正倒数性：$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$；

（6）皆正乘方性：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0\quad (n\text{为正整数})$；

2.一元一次不等式

（1）一元一次不等式的解法：　$ax>b(a\neq 0)\begin{cases} a>0\text{时}\quad x>\frac{b}{a}\\ a<0\text{时}\quad x<\frac{b}{a}\end{cases}$

（2）一元一次不等式组的解法：分别求出组成不等式组的每一个一元一次不等式的解集后，求这些解集的交集（可以运用数轴，直观地求出交集）。

3.一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0 \quad (a>0)$
$ax^2+bx+c<0 \quad (a>0)$

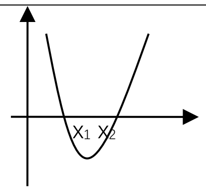
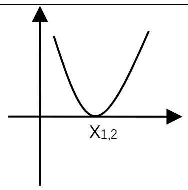
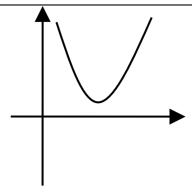
（1）解与一元二次方程的根的关系

设方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有两个不等实根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x_1<x<x_2$。

注意：若不等式二项式系数 $a<0$，可化为正值再求解集。 若不等式带等号（即≤或≥），则只需在解集中增加两个根即可。

（2）一元二次不等式的图像解法

依表中开口向上的抛物线 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的不同位置求解。

△= b²–4ac	△>0	△= 0	△< 0
$f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$			
f(x) = 0 根	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
f(x) > 0 解集	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$	$x\in R$
f(x)<0 解集	$x_1 < x < x_2$	$x \in \phi$	$x \in \phi$

三、函数

1.集合

（1）几种集合的命名：

空　集：不包含任何元素的集合叫做空集，用∅表示.

自然数集：N　　　　正整数集：N*或 N+　　　　整数集：Z；

有理数集：Q；　　　实数集：R.

（2）集合的区间表示

$\{x|a<x<b\}$ 可表示为 $x\in(a,b)$

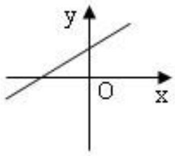
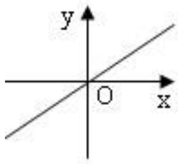
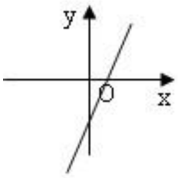
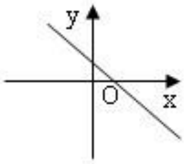
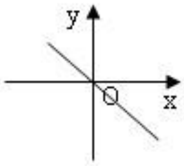
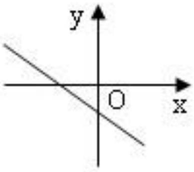
$\{x|a\le x<b\}$ 可表示为 $x\in[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$ 可表示为 $x\in(a,b]$

$\{x|a\le x\le b\}$ 可表示为 $x\in[a,b]$

2.一次函数 y=kx+b（k≠0）

k,b 的符号	函数图像	图像的位置	性质

	b>0		图像过第一，二，三象限	
k>0	b=0		图像过第一，三象限	y 随 x 的增大而增大
	b<0		图像过第一，三，四象限	
	b>0		图像过第一，二，四象限	
k<0	b=0		图像过第二，四象限	y 随 x 的增大而减小
	b<0		图像过第二，三，四象限	

3.二次函数

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$

（2）顶点式：$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

（3）交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

系数a,b,c和$y=ax^2+bx+c$的关系

1）a决定开口方向，当$a>0$，抛物线开口向上；当$a<0$，抛物线开口向下；

2）对称轴为$x=-\frac{b}{2a}$，a和b决定对称轴在y轴的左侧或右侧，

重要推论：当a，b同号，对称轴在y轴左侧；当a，b异号，对称轴在y轴右侧；当$b=0$时，对称轴即y轴。

第四章 应用题

一、利润及百分比问题

1.变化率概念

$$变化率=\frac{变化量}{变前量}\times100\%=\frac{|现值-原值|}{原值}\times100\%$$

设原值为a，变化率为$p\%$，若上升$p\%$，则现值$=a(1+p\%)$，若下降$p\%$，则现值$=a(1-p\%)$.

2.利润问题

（1）$利润=售价-进价$；

（2）$利润率=\frac{利润}{成本(进价)}\times100\%=\frac{售价-成本}{成本}\times100\%=(\frac{售价}{成本}-1)\times100\%$；

（3）售价=成本+利润=成本×(1+利润率）.

（4）亏损＝进货价-售价

（5）亏损率＝（进货价 - 售价）÷进货价×100%

二、行程问题

1、基本公式

路程＝速度×时间；　　路程÷时间＝速度；　　路程÷速度＝时间.

2、相遇及追击问题

（1）直线运动

①相遇：两人相向而行，在中途相遇：设甲乙两人在一段路程上行走，他们的速度分别为v_1,v_2，相遇时两人走过的路程为S_1,S_2，相遇时所用时间为t，则$t=\frac{S_1+S_2}{v_1+v_2}$.

②追击：甲乙两人从同一起点行走，甲先走了一段路程S后，乙沿同样的路程去追甲，乙追上甲所用时间为t，他们的速度分别为$v_1,v_2\left(v_1<v_2\right)$，则$t=\frac{S}{v_2-v_1}$.

③列车问题，注意条件，合理计算火车的长度

火车过桥：过桥时间＝（车长＋桥长）÷车速

火车追及：追及时间（超过）＝（甲车长＋乙车长＋距离）÷（快速 - 慢速）

追及时间（追及）＝距离÷（快速 - 慢速）

火车相遇：相遇时间＝距离÷（甲车速＋乙车速）

（2）圆周运动（设圆周长为S）

①甲乙从同一点开始同向运动：则$S_{甲}-S_{乙}=S$，甲乙每相遇一次，甲比乙多跑一圈，若相遇n次，则有$S_{甲}-S_{乙}=n\cdot S$；

②甲乙从同一点开始相背运动：则$S_{甲}+S_{乙}=S$，甲乙每相遇一次，甲与乙路程之和为一圈，若相遇n次有$S_{甲}+S_{乙}=n\cdot S$.

三、相对速度问题

顺水逆水问题原理：

$$\begin{cases}V_{顺}=v_{船}+v_{水}\\V_{逆}=v_{船}-v_{水}\end{cases}\Rightarrow V_{顺}-V_{逆}=2\,v_{水}$$

也可以理解为：

（顺水速度＋逆水速度）÷2＝船速

（顺水速度 - 逆水速度）÷2＝水速

四、工程问题

工作量＝工作效率×工作时间

工作时间＝工作量÷工作效率

工作时间＝总工作量÷（甲工作效率＋乙工作效率）

解题思路和方法：发通后可以利用上述数量关系的公式，两种方法：

法①：没有给具体每个人的工作量问题，设总量为“1”；

法②：已知每个人的工作量，设总量为已知量的最小公倍数。

五、平均值问题（十字相乘法）

原理：设一个整体可分成 A、B 两部分，A 部分的数值有x个a，B 部分的数值有y个b，A+B 的平均值为c，则我们可用十字交叉法来求 A、B 数量之比：

$$\begin{array}{lccccc}\text{A:} & a & & & & c-b\\ & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & c & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ \text{B:} & b & & & & a-c\end{array}$$

六、溶液问题

1、解题原理：

（1）溶液=溶质+溶剂

（2）$浓度=\dfrac{溶质}{溶液}\times100\%$

2、方法

（1）利用十字相乘法速解混合溶液比例问题

设混合前浓溶液的质量为 m，溶质质量分数为 a%，稀溶液的质量为 n，溶质质量分数为 b%，两溶液混合后的溶质质量分数为 c%：则：$ma\%+nb\%=(m+n)c\%$，化简为：$\frac{m}{n}=\frac{c-b}{a-c}$

本式可用下面十字交叉形式表示：

$$\begin{array}{ccccc}a & & & & c-b\\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & c & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ b & & & & a-c\end{array}$$

这种方法也称“对角线法”，其中 c 必项是已知量。若用于纯溶剂(如水)稀释，则可把纯溶剂中溶质质量分数当作 0，若加入的是纯溶质，则可把溶质质量分数看作 100%。

（2）稀释问题超级计算公式，利用超级公式速解求稀释体积等相关问题 （c_0 为原浓度，c_n 为新浓度）

1）设已知溶液质量为 M，每次操作中先倒出 M_0g 溶液，再加入 M_0g 溶剂（清水），重复 n 次，

$$c_n=c_0\left(\frac{M-M_0}{M}\right)^n=c_0\left(1-\frac{M_0}{M}\right)^n$$

2）设已知溶液质量为 M，每次操作中先倒入 M_0g 溶剂（清水），再倒出 M_0g ，溶液重复 n 次，

$$c_n=c_0\left(\frac{M}{M+M_0}\right)^n$$

第五章 数列

一、数列

项公式 a_n 和前 n 项和 S_n 之间的关系

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i,\quad a_n=\begin{cases}a_1=S_1 & n=1\\ S_n\text{-}S_{n-1} & n\geq 2\end{cases}$$

二、等差数列

1.**定义**：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个等差数列的公差，记做 d。即：$a_{n+1}-a_n=d.(d\text{为常数},n\in N^*)$;。

2.**通项公式**

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n-a_{n-1}=d(n\geq2)$

$a_n=a_m+(n-m)d$

$a_n=d\cdot n+(a_1-d)$

$n=(a_n-a_1)/d+1$

$d=(a_n-a_m)/(n-m)$

$$a_{\frac{n+m}{2}}=\frac{a_n+a_m}{2}$$

3.**前 n 项和公式**：$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

4.**等差中项**：如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项，即 $A=\frac{a+b}{2}$.

中项公式：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}.(n\in N^*)$

5.**下标和定理**：若 $m+n=p+q$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in N^*)$.特殊地，当 $p=q$ 时, $a_m+a_n=2a_p$ 。注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项

数要分别相等。

三、等比数列

1.定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的商等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做这个等比数列的公比，记做 q。即：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为非零常数）

2.**通项公式**：$a_n=a_1q^{n-1}(q为常数,n\in N^*)$；　推广：$a_n=a_mq^{n-m}(q为常数,n、m\in N^*)$.

3.前 n 项和：$S_n=\begin{cases}na_1.(q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}或\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1)\end{cases}$

4.等比中项：如果 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项，$G=\pm\sqrt{ab}$，显然$ab>0$。

中项公式：$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}\left(n\in N^*\right)$

5.**下标和定理**：$\{a_n\}$为等比数列，若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q(m,n,p,q\in N^*)$.特殊地，当 p=q 时，$a_m\cdot a_n=a_p{}^2$.

注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。

第六章 几何部分

一、平面几何

1.三角形

（1）三角形内角和定理：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

（2）三角形三边关系：三角形任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

（3）三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

（4）三角形面积公式：

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}(海仑公式)，其中\ 2p=a+b+c$$

其中h是a边上的高，$\angle C$是a,b边所夹的角，p为三角形的半周长.

（5）中线：三角形中，连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线。

（6）角平分线：三角形的一个内角的平分线与它的对边相交，连接这个角的顶点和交点之间的线段叫三角形的角平分线。

（7）高线：从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线做垂线,顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高线）

2.四边形（平行四边形）

（1）四边形的**内角和**等于 360°

多边形内角和定理：n 边形的内角的和等于（n-2）×180°.

推论：多边形的外角和是 360°.

（2）平行四边形的性质

①平行四边形的对边平行且相等，对角相等；

②平行四边形的对角线互相平分。

③若平行四边形两边长是a，b，以b为底边的高为h，则面积为$S=bh$，周长$l=2(a+b)$.

（3）矩形两边长为a,b,面积S =ab,周长C = 2(a+b)，对角线$l=\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 菱形四边长都为a，以a为底边的高为h,面积$S=ah=\frac{1}{2}l_1l_2$（l_1,l_2为两条对角线的长），周长C = 4a。

（5）梯形上底为a，下底为b，高为h，中位线$l=\frac{1}{2}(a+b)$，面积$S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

3.圆

（1）圆的定义：圆是到定点的距离等于定长的点的集合

（2）周长为$C=2\pi R$，面积是$S=\pi R^2$.

（3）切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径

（4）扇形：一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫扇形.

①在扇形OAB中，若圆心角为n^0，则AB弧长$l=\frac{n\pi R}{180}$，扇形面积$S=\frac{n\pi R^2}{360}$

②若圆心角为θ弧度，则AB弧长$l=R\theta$，扇形面积$S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}R^2\theta$

二、立体几何

1.长方体

设长方体在同一个顶点上的三条棱长分为a，b，c

（1）体积$V=abc$

（2）全面积：$S_{全}=2(ab+bc+ac)$

（3）体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

（4）当$a=b=c$时，称为正方体，$V=a^3$，$S_{全}=6a^2$，$d=\sqrt{3}a$

2.圆柱体

设圆柱的高为h，底面圆半径是r

(1)体积：V=$\pi r^2\cdot h$

(2)侧面积：$S_{侧}=2\pi r\cdot h$（r为底面圆的半径，h为圆柱的高）

其侧面展开图为一个长为$2\pi r$，宽为h的长方形。

（3）全面积：$S_{全}=S_{侧}+S_{(上底+下底)}=2\pi r\cdot h+2\pi r^2$

3.球体

设球的半径为R：

（1）球的表面积公式：$S_{表}=4\pi R^2$或$S_{表}=\pi D^2$ （D是球的直径）

（2）球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$或$V=\frac{1}{6}\pi D^3$ （D是球的直径）

三、平面解析几何

1.两点之间距离公式

在平面直角坐标系中，设点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2.中点坐标公式

点 $P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的中点，其中 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$，则 P 点坐标为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2},y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$。

***求坐标：**

（1）定性分析：看坐标所在的象限；

（2）代数关系：坐标为对应方程的根；

（3）几何关系：坐标(x，y)中， |x|表示在 x 轴上投影的距离， |y|表示在 y 轴上投影的距离；

（4）定量计算：联立求解相交的两个方程。

3.直线的倾斜角与斜率

过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x_1\neq x_2\right)$.

4.直线的方程

（1）点斜式： $y-y_1=k(x-x_1)$（直线 l 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 k）.

（2）斜截式： $y=kx+b$，斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b。

（3）一般式： $Ax+By+C=0$ (其中 A、B 不同时为 0)。 斜率为：$-\dfrac{A}{B}$

（4）两点式： $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

（5）截距式： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（已知 x 轴上的截距为 a， y 轴上的截距为 b）

***求直线方程：**

（1）定性分析：先看斜率，再看截距；

（2）代数关系：直线方程应满足相对应的点；

（3）定量计算：点、斜式；

（4）斜率的计算：平行？垂直？两个点？倾斜角？

5.两直线的位置关系

（1）相交

求交点：联立 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一一组实数解。

（2）平行

①若 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$； $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\neq b_2$

②若 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. $l_1//l_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

（3）垂直

①若 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$； $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$

②若 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

（4）两条平行直线的距离公式

直线 l_1： $Ax+By+C_1=0$ 平行于直线 l_2： $Ax+By+C_2=0$，则它们之间的距离为：$d=\dfrac{\left|C_2-C_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

6.点到直线的距离公式

平面内一点$P(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离公式：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

7.点和圆、直线和圆、圆与圆的位置关系

（1）点$P(x_0,y_0)$与圆的位置关系

1）对于圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，若$d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则有：

$d>r\Leftrightarrow$点P在圆外；

$d=r\Leftrightarrow$点P在圆上；

$d<r\Leftrightarrow$点P在圆内。

2）对于圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则有：

$x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F<0\Leftrightarrow$点P在圆内；

$x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F=0\Leftrightarrow$点P在圆上；

$x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F>0\Leftrightarrow$点P在圆外。

（2）直线与圆的位置关系有三种：（本质是求点到直线的距离）

直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：圆心到直线的距离：$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$d>r\Leftrightarrow$相离；　$d=r\Leftrightarrow$相切；　$d<r\Leftrightarrow$相交

（3）圆与圆的位置关系有五种：（本质是求两点之间距离）

设两圆圆心分别为O_1、O_2，半径分别为r_1,r_2。$|O_1O_2|=d$

$d>r_1+r_2\Leftrightarrow$外离$\Leftrightarrow$4条公切线；

$d=r_1+r_2\Leftrightarrow$外切$\Leftrightarrow$3条公切线；

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\Leftrightarrow$相交$\Leftrightarrow$2条公切线；

$d=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内切$\Leftrightarrow$1条公切线；

$0\le d<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内含$\Leftrightarrow$无公切线

第七章 数据分析

一、排列组合

1.两个基本原理

（1）加法（分类）原理

如果完成一件事有 n 类办法,只要选择其中任何一类办法中的任何一种方法,就可以完成这件事.若第一类办法中有m_1种不同的方法,第二类办法中有m_2种不同的方法，……，第 n 类办法中有m_n种不同的办法，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

（2）乘法（分步）原理

如果完成一件事，必须依次连续地完成 n 个步骤，这件事才能完成.若完成第一个步骤有m_1种不同的方法，完成第二个步骤有m_2种不同的方法，……，完成第 n 个步骤有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$种不同的方法.

2.排列与排列数

（1）从n个不同元素中取出m个元素(m≤n)的所有排列的种数，称为从n个不同元素中取出m个不同元

素的排列数，记作P_n^m，其中$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.有$\mathrm{P}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

当 m = n 时，$P_n^n = n!$。

（2）使用条件：

1) n 个不同元素

2) 任取 m 个

3) 讲究顺序

3.组合与组合数

（1）从n个不同元素中，取出$m(m \le n)$个元素的所有组合的种数，称为从n个不同元素中，取出m个不同元素的组合数，记作C_n^m，其中$\mathrm{C}_n^m = \dfrac{\mathrm{P}_n^m}{\mathrm{P}_m^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

关于组合数，我们需要掌握公式：$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$.

（2）使用条件：

1) n 个不同元素

2) 任取 m 个

3) 并为一组，不讲顺序

二、概率初步

1.概率基本概念

（1）定义：所谓事件 A 的概率是指事件 A 发生可能性程度的数值度量，记为$P(A)$，显然$0 \le P(A) \le 1$。

（2）概率的性质

性质 1（加法公式）：对任意事件 A，B，有$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB)$.若 A,B 互斥，则$P(AUB) = P(A) + P(B)$.

性质 2（对立事件公式）：对任意事件 A，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2.古典概型

如果在一次试验中，所有可能出现的基本事件只有有限个，并且每个基本事件出现的可能性相等，我们就把具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

古典概型的概率计算公式为 P(A) = $\dfrac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$.

3.事件的独立性

独立事件：设 A,B 是两个事件，如果事件 A 的发生和事件 B 的发生互不影响，则称两个事件是相互独立的。对于相互独立的事件 A 和 B，有$P(AB) = P(A)P(B)$。

4.贝努利概型

在贝努利概型中，若设$q = 1 - p$，则在n次试验中事件 A 恰好发生$k(0 \le k \le n)$次的概率为：

$P_n(k) = C_n^k P^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots n)$.

三、数据描述

1.（算术）平均数

定义：有n个数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，称$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$为这$n$个数的算术平均数（也称平均数），记做

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right).$$

基本定理：当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正数时，他们的算术平均值不小于几何平均值，即 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ ，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立。

2.中位数

将 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，按从小到大的顺序依次排列，当 n 为奇数时，处在最中间的那个数（$x_{\frac{n+1}{2}}$）是这组数据的中位数；当 n 为偶数时，处在最中间的两个数的平均数（$\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$）是这组数据的中位数.

3.方差与标准差

(1) 定义：设 $\overline{x}$ 是 n 个数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均数，方差：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$

(2) 标准差（也称均方差），记做 s， $s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]}$

它是用来衡量一组数据波动的大小。样本方差、标准差体现了总体的分散程度。